On rappelle les limites de l'exponentielle et des fonctions usuelles vues en $1^{\text{ère}}$:

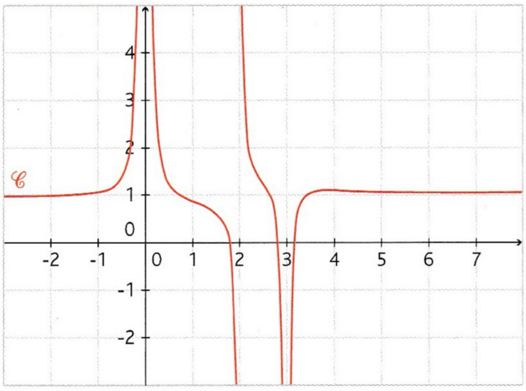
Propriété 5.7 $\lim\limits_{x \to +\infty} exp(x) = +\infty \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} exp(x) = 0$

Propriété 5.8

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty \text{ et } \lim_{x \to -\infty} x\mathrm{e}^x = 0$$

3. Énoncés des exercices

Exercice 5.1 La courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous représente une fonction f :



1°) Déterminer graphiquement les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2°) Donner les équations des asymptotes de $\mathscr{C}$.

Exercice 5.2 On donne ci-dessous le tableau de variations d'une fonction f.

x	0		2		7
f(x)	4	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	5

1°) Donner l'ensemble de définition de la fonction f.
2°) Donner la limite à droite et la limite à gauche en 2 de la fonction f.
3°) En déduire l'équation de l'asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction f.

Exercice 5.3 On considère la fonction f définie par : $f(x) = -2 + \frac{1}{x}$
1°) Donner les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$
2°) Donner les limites de f à droite et à gauche en 0.
3°) Déduire des questions précédentes les asymptotes à la courbe représentative de la fonction f dans un repère.

Exercice 5.4 Donner la limite de :
1°) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 3$, en $+\infty$.
2°) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^8 - 7$, en $-\infty$.
3°) f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{-5}{x^5}$, en $+\infty$.
4°) f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{12}{x^3} + 1$, en $-\infty$.

Exercice 5.5 Déterminer les limites des fonctions rationnelles suivantes aux bornes de leurs ensembles de définition.
1°) f définie sur $\mathbb{R} - \{\frac{1}{3}\}$ par $f(x) = \frac{x-2}{(3x-1)^2}$
2°) g définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $g(x) = \frac{4x^2+3}{x^2}$
3°) h définie sur $\mathbb{R} - \{5\}$ par : $h(x) = \frac{x^4-3x^2-4}{x-5}$

Exercice 5.6 On considère la fonction f définie sur $D_f = \mathbb{R} - \{3\}$ par $f(x) = \frac{-2x+1}{x-3}$. On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère.
1°) Démontrer que, pour tout x de D_f, $f(x) = -2 - \frac{5}{x-3}$
2°) Donner l'équation de l'asymptote horizontale (d) à la courbe $\mathscr{C}$ en $-\infty$ et $+\infty$.
3°) Étudier la position relative de $\mathscr{C}$ par rapport à (d).

Exercice 5.7 On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = 5x^3 - x^2 + 4$ et $g(x) = x^2$
1°) Donner l'expression de la fonction $g \circ f$.
2°) Étudier les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de $g \circ f$.

Exercice 5.8 On note f la fonction inverse.
Dans chacun des cas suivants, définir la fonction $f \circ g$, puis déterminer sa limite (ou, si nécessaire, sa limite à droite et sa limite à gauche) en a.
1°) $g : x \in \mathbb{R} \mapsto g(x) = -5x + 1$, et $a = \frac{1}{5}$
2°) $g : x \in \mathbb{R} \mapsto g(x) = x^2 + x - 2$, et $a = 1$
3°) $g : x \in [3; +\infty[\mapsto g(x) = \sqrt{x - 3}$, et $a = 3$
4°) $g : x \in \mathbb{R} \mapsto g(x) = (x + 4)^2$, et $a = -4$

Exercice 5.9 Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$f(x) = \frac{cos(x)}{x}$$

Exercice 5.10 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \frac{2sin(x)}{x} - 4$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère.
Déterminer l'équation de l'asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

Exercice 5.11 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{\frac{4}{3}\}$ par $f(x) = \frac{1}{9x^2-24x+16}$. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère.
1°) Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2°) En déduire les équations des asymptotes à la courbe $\mathscr{C}$.
3°) Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à l'axe des abscisses.
4°) Étudier le sens de variation de f
5°) Tracer les asymptotes, puis la courbe représentative de f dans un repère.

Exercice 5.12 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3 + xe^{1-x}$. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.

1. Calculer la limite de f en $-\infty$
2. (a) Montrer que pour tout réel x, $f(x) = 3 + \frac{xe^x}{e^x}$.
   (b) Calculer la limite de f en $+\infty$. Quelle conséquence graphique peut-on en déduire ?
3. (a) Montrer que pour tout réel x, $f'(x) = (1 - x)e^{1-x}$
   (b) Dresser la tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$

Exercice 5.13 Soient f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2e^x+1}{e^x-1}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Calculer la limite de f en 0.
2. (a) Montrer que pour tout réel x de $]0; +\infty[$, $f(x) = \frac{2+e^{-x}}{1-e^{-x}}$.
   (b) Calculer la limite de f en $+\infty$.
3. Justifier que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet deux asymptotes. En donner une équation.
4. (a) Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de $]0; +\infty[$
   (b) En déduire le sens de variation de f.